高等学校微積分指導に関する一考察
－微分の概念を習得する教材について－

坂井　和裕

要　　約

本稿では、高等学校における微積分の学習が形式的な計算練習に偏りやすい状況があることから、高校生が微分の概念を獲得するための教材として、三角定規を組み合わせた「微分定規」が有効な教材であることの検証を試みるものである。

キーワード

学校数学　微分積分　教材　微分定規

はじめに

2022（令和 4）年度から年次進行で移行する新学習指導要領では、高等学校数学科の目標である知識及び技能、思考力・判断力・表現力、学びに向かう力・人間性等を示すとともに、「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して」育成することを目指している[1]。

この「数学的な見方・考え方」のうち、数学的な見方とは、事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質をとらえることであり、数学的な考え方とは、目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、論理的に考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能を関連づけながら、統合的・発展的に考えたり、体系的に考えたりすることである。

高等学校における微分・積分の学習においては、無限・極限といった新しい概念が登場し、その本質を捉えた上で 、Cauchy 以後に整備され現在にいたる洗練された微積分の手法に習熟し、数や式、グラフを活用して問題解決に取り組むことになるが、実際は、無限・極限およびその歴史に時間を割いて概念を考察する余裕はあまりなく、無限や極限はさりげない日常語としての理解にまかせ、相当な時間を計算の習熟に費やしている傾向がある。つまり、「微分や積分の本質的な概念は直観にまかせ、操作の習熟を中心に計算を行う」学習に偏よっている。与えられた操作を繰り返す機械的な作業に陥る結果､問題を批判的に眺めたり、数学的背景を探るという姿勢が十分に養われているとは言い難い点が本稿の出発点である。

例えば、導関数という概念について、

$$\mathrm{y} = x^n$$
$$y' = nx^{(n-1)}$$

など公式はよく使えても、微分とは何かという本来の意味は答えられない場合がある。

Ⅰ　微分の概念獲得のための教材

１　教材の考え方

細谷俊夫は、教科内容とは教師によって教授され、生徒によって学習される内容を指すとした上で、組織化されたものを教科課程、具体的な教授の場面で取り上げる内容を教材と呼び、両者を含めた概念を教科内容としている[2]。この教科内容を構成するものは一定の知識・技能であるが、それは教師によって組織化され、かつ指導される生徒の活動をその中に含むものである。

高等学校の微積分指導において、思考力・判断力・表現力を発達させる具体的な学習活動を教師が提供するために、微積分指導の適切な「教材」を示すことが、本稿の狙いである。

２　導関数を学ぶ教材

益子典文によれば、学習者のつまずきに基づいて開発される教材を「学ぶ教材」、学習者のつまずきに関係なく、教える側の論理で開発される教材を「教える教材」としている[3]。

導関数の授業において、教える側の論理としては、教科書に準拠いた以下のステップで構成されることが一般的である。

・平均変化率を定義
・平均変化率の極限として瞬間変化率を定義
・瞬間変化率は接線の傾きと同等であることの理解
・任意の点における接線の傾きを表した関数が導関数

この論理構成においては、学習者は、瞬間変化率という極限の概念を受け入れ、それを、ある定点における接線の傾きという幾何的概念で理解している。その上で、その定点を動かして一般化し、導関数の概念を構築する。

しかし、その後、形式化された導関数の公式を用いて計算演習に多くの時間を割く中で、やがて多くの学習者が、微分を代数的な操作として再構築し、微分の概念を喪失してしまう場合もある。微分という抽象的な概念を獲得するための生徒の活動モデルとして、以下、「微分定規」を用いた学習活動を示す。

３　微分定規による導関数の作図

これは、勝手な関数のグラフ上に、三角定規の一つの角を傾きと接する（予め傾きが分かっている）有限個の点を特定し、その点を用いて導関数の概形をつかむ活動であり、渡辺公夫の発案による。ここでは三角定規を「微分定規」と呼んで使用する。

図１は、ある三次関数のグラフ上に、微分定規をあてて 45 度の傾きをもつ点を一つ探した状態である。**図２**は、この点における接線の傾きが$\tan 45^\circ = 1$であり、この関数の導関数はここで値 1 をとることから、あらかじめシート上に用意した直線 y=1 上にプロットすることで、導関数が通る点を示したものである。**図３**は、同様に他の点をグラフ上から探し、同じ作業を行ったものである。これで、導関数のグラフが通る 2 点を決定したことになる。

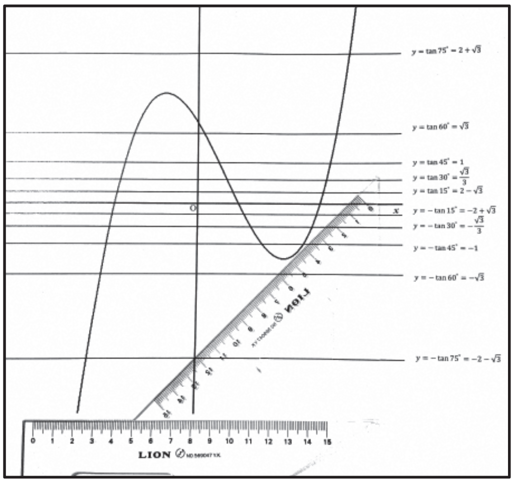

図１　傾き 45 度の点を探す

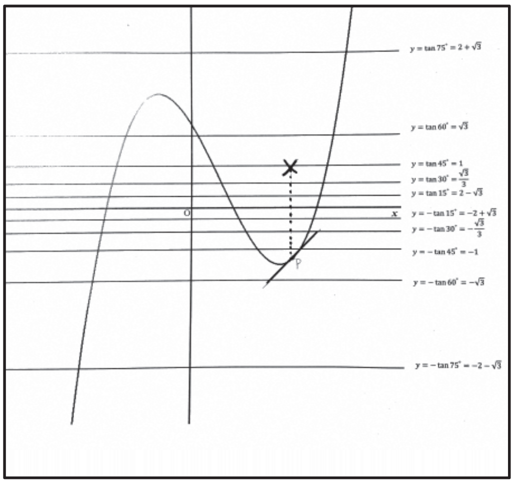

図２　傾きの値は１であり、y 座標に１をとる

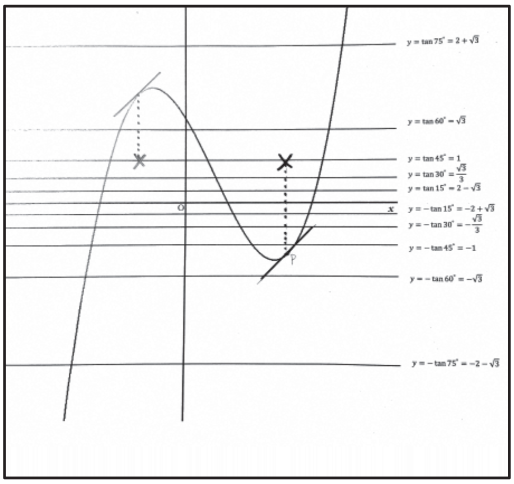

図３　他の傾き１の点も探し、y 座標に１をとる

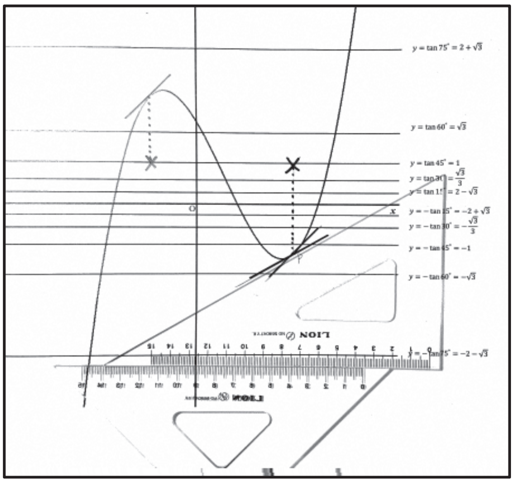

図４　次に 30 度の傾きの点を探す

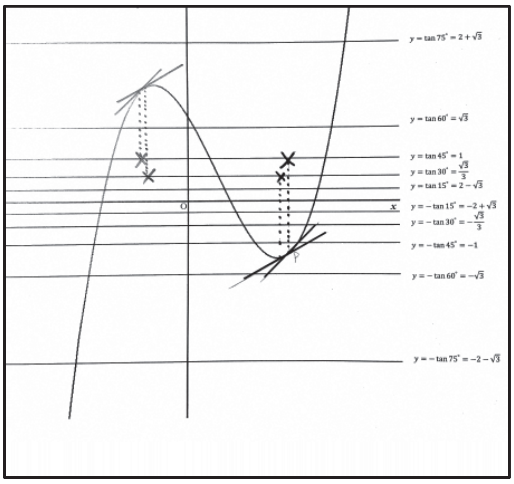

図５　同様に操作を繰り返す

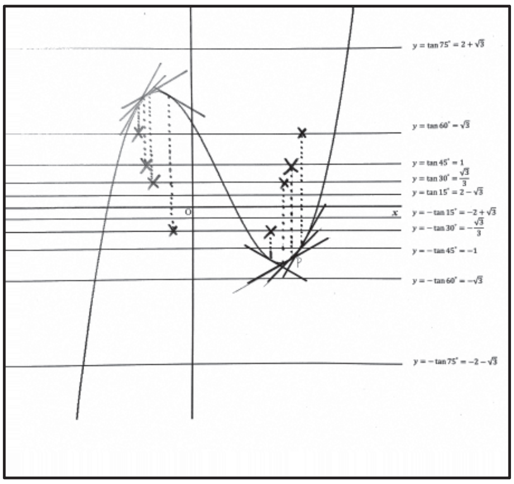

図６　点を増やすことで導関数の概形が現れる

図４は､今度は 30 度の角度を利用して、30 度の傾きをもつ接点を探している状態である。**図５**は、$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$の傾きをもつ点が 2 点決定されて、その導関数が通る新たな 2 点を得た状態である。**図６**はこの作業を繰り返し、導関数のグラフの通る点を次々に決定していく様子である。微分定規の当て方で、-30 度、-45 度、-60 度も決定できる｡決定された点を滑らかにつなげば､この任意曲線の導関数のグラフを描くことになる。3 次関数の導関数であるから、2 次関数の概形が表れてきている。

Ⅱ　作図作業と結果

実際に、教職経験のあるＡ、Ｂの２名に作図を依頼し､教材としての検証を行った｡2 名とも、これまで微分や導関数の指導においては平均変化率から導入した経験をもつ。Ａは教職経験 10 年目、Ｂは 19 年目である。

図７と**図８**は、それぞれＡ、Ｂが、微分定規を用いて導関数のグラフを作図した結果であり､所要時間は 30 分程度である｡今回、あえて「微分定規」とした理由は、市販の三角定規で測定可能な角度（30 度、45 度、60 度）を補完するために、もう一つ、15 度、75 度の定規も用意しておいたためであるが、作図作業の際、両名とも既存定規の組み合わせで対応していたため、提示する必要はなかった。

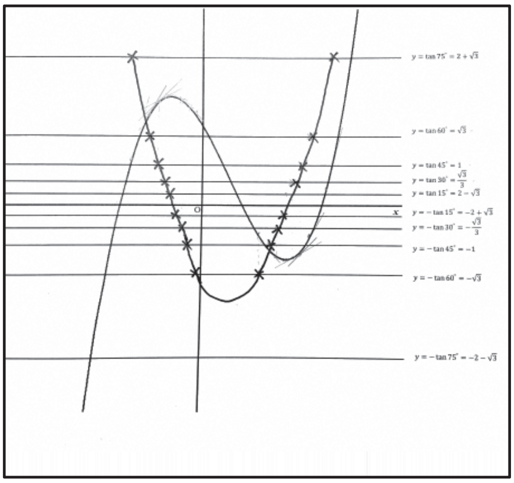

図７　Ａによる$\mathbf{y = \frac{1}{3}(x-1)(x-3)(x+2)}$の導関数

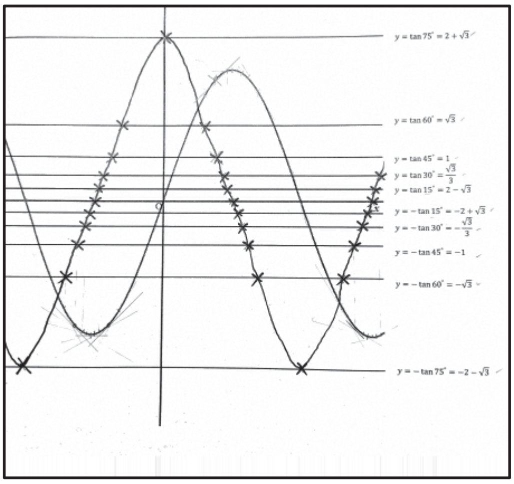

図８　Ｂによる$\mathbf{y = 3\sin x}$の導関数

Ⅲ　検証

Ａ、Ｂには、微分定規を用いて作図に取り組む前に、微積分指導について日頃感じていることを自由記述で述べてもらった。

表１は、高校生が微分の概念をどうとらえているかであり、**表２**は、微積分指導において日頃感じていることである。

Ａ､Ｂとも､学習指導要領にあるように、微分がグラフを描画する強力なツールであり、その「数学的なよさ」を伝え、その手ごたえは自覚している｡一方､両名から｢作業」や「問題を解く」というワードが出てくるように、学習者が微分概念をどの程度定着しているかについては、実感できてい

ない状態であることを示している。

また、作図後に、教材としての微分定規の可能性について自由記述で述べてもらったものが**表３**である。

表１　高校生は「微分」の概念をどうとらえていると感じるか。

A	関数のグラフを描くための方法
B	接線の傾きを求めグラフを描くための道具。

表２　微積分指導において日頃感じていること

A	作業(問題演習)をさせることが多く、導関数からグラフの概形がかけるよさや、微分を繰り返すことで精度が向上していくところも考えさせたい。
B	数学を得意としない生徒が多いため、教師も生徒も、概念の理解よりも、問題が解けることを優先している。比較的数学な得意な生徒の場合でも、授業進度を優先し、概念理解は後回しにされることが多いように感じる。

表３　教材としての微分定規の可能性について

A	・式が与えられてなくても導関数の概形がわかることが面白い。公式ではなく(微分の)概念を体得することに有効と感じる。 ・作業は難しくなく、二つの定規を工夫すれば75度と15度についてもプロットできるので、生徒が自分でより多くの情報を探る活動にもなる。
B	・もとの式がわからなくても微分した関数が求められることに気がつける。 ・これまで教科書に沿って授業を行ってきたので、微分は「式」が与えられて行うことが前提であった。 ・比較的数学が苦手な生徒でも取り組めるのではないか。

Ⅳ　考察

両名ともに、この微分定規の特徴について、

・任意曲線について幾何的に作図可能であり、式により導関数を計算する代数操作を前提としていないこと、
・作業は難しくなく、比較的数学が得意でなくても取り組める、

と感じている。

微分の概念を指導する教材には、他にもICT 機器を用いて多数の平均変化率を具体的に計算させる方法もあるが、そのためには電卓やコンピューターなどのツールに関数の「式」を「のせる」作業が必要となる。微分定規は、たとえフリーハンドで描いた曲線であっても、そのまま導関数の作図を行うことができる「直接性」が特徴である。すなわち、微分定規は、微分の本質をそのまま抽出している教材である。

以上から、微分定規が「教える教材」ではなく「学ぶ教材」として有効性であることの傍証が得られたと思われる。

微分の代数的な公式は、概念獲得後の学習・その応用面で有用であるが、学習が概念獲得と公式の習熟とのバランスを欠くことがないよう、適切なモデルや教材が用意されていることが必要である。

〔付記〕

本稿は、筆者が 1996 年～1997 年の 2 年間、筑波大学大学院教育研究科教科教育専攻数学教育コースに在籍していた間の修士論文副論文「高等学校の微積分指導に関す

る一考察」に、加筆修正を行ったものである。

〔謝辞〕
筑波大学大学院教育研究科在籍時、微分定規を含め数学教育について多くの示唆を与えていただきました渡辺公夫先生と、本稿の加筆修正にあたり指導助言をいただいた益子典文先生に心よりお礼申し上げます。

〔註〕
1) 「岐阜県教育委員会高等学校教育課程講習会参考資料」参照。
2) 細谷俊夫「教科内容」『教育方法』岩波諸点、1991 年、102 頁。以下、同論考を参照。
3) 益子典文「教材をつくる～教材の研究と開発～」生田孝至・三橋功一・姫野完治編著『未来を拓く教師のわざ』一莖出版、2016 年、34 頁。以下、同論考を参照。